УДК 517.941
DOI 10.21685/2072-3040-2019-2-2

А. И. Вагабов

О РЕГУЛЯРНОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ДВУМЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ КОРНЯМИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ КРАТНОСТЕЙ

Аннотация.

Актуальность и цели. Рассматривается задача, относящаяся к классу регулярных спектральных задач в более расширенном их понимании, чем в классическом по Биркгофу – Тамаркину смысле. Расширение касается основного дифференциального пучка, а также краевых условий: во-первых, наличие двух различных корней различных же кратностей у основного характеристического уравнения; во-вторых, краевые условия относятся по существу к типу произвольных распадающихся условий с соблюдением их регулярности. Хорошо известна нерегулярность таких условий в классических краевых задачах. Спектром задачи являются числа в правой части комплексной полуплоскости, уходящие на бесконечность в направлении мнимой оси, на логарифмическом удалении от нее.

Материалы и методы. В работе используются методы функционального анализа, дифференциальных уравнений и алгебры.

Результаты. Дано построение резольвенты задачи в виде мероморфной функции по параметру λ – функции Грина. В основной теореме установлено, что полный вычет по параметру от резольвенты, приложенной к $(n + 1)$-кратно дифференцируемой функции (обращающейся в нуль на концах 0,1 вместе с производными) равен этой функции. Указанный вычет представляет ряд Фурье по корневым функциям исходной задачи.

Выводы. Заложены начала теории регулярных спектральных задач с характеристическими корнями произвольных кратностей.

Ключевые слова: функция Коши, функция Грина, спектр, ряд Фурье.

A. I. Vagabov

ON THE REGULARITY OF SPECTRAL TASKS WITH TWO CHARACTERISTIC ROOTS ARBITRARY MULTIPLICITY

Abstract.

Background. The task belonging to the class of regular spectral tasks in significantly their expanded understanding, than in sense, classical on Birkgofu-Tamarkin, is considered. Expansion concerns the main differential bunch and also regional conditions. First, – presence of two various roots of various frequency rates at the main characteristic equation. On the other hand, regional conditions belong in essence to type of any breaking-up conditions with respect for their regularity. The irregularity of such conditions in classical regional tasks is well-known. Range of a task are the numbers in the right part of the complex half-plane leaving on infinity in the direction of an imaginary axis on logarithmic removal from it.

Materials and methods. The paper uses the methods of functional analysis, differential equations and algebra.

Results. The construction of the resolvent of the problem is given in the form of a meromorphic function with respect to the parameter λ, – of the Green function. In the main theorem it is established that the full deduction in parameter from the resolvent attached to n+1 – multiply the differentiable function (addressing in zero on the ends 0,1 together with derivatives) is equal to this function. The specified deduction represents Fourier's number on root functions of an initial task.

Conclusions. The foundations of the theory of regular spectral problems with characteristic root of arbitrary multiplicities are laid.

Keywords: Cauchy's function, Green's function, range, Fourier's number.

Постановка задачи

В предыдущих работах авторов [1–3] изучены спектральные задачи, относящиеся к случаям обыкновенного дифференциального пучка n-го порядка с единственным характеристическим корнем, а также в случае пучка $2n$-го порядка с двумя характеристическими корнями одинаковых порядков $-n$. С точки зрения общей теории весьма существенно преодоление барьера – одинаковости порядков.

В данной работе поставлена задача, относящаяся к пучку порядка $n+m$ с двумя характеристическими корнями порядков n и m, где $m<n$. Для бо́льшей наглядности и простоты изложение ведется в случае $m=2$. В основной теореме установлена формула разложимости произвольной функции в ряд Фурье по корневым функциям пучка.

Рассматривается краевая задача для дифференциального выражения

$$l(y)\equiv\left(\frac{d}{dx}-\lambda\right)^{n}\left(\frac{d}{dx}+\lambda\right)^{2}y(x),\quad 0<x<1, \tag{1}$$

при распадающихся краевых условиях:

$$\underset{s=\overline{1,n}}{U_s}(y)\equiv\frac{d^{s-1}y(0)}{dx^{s-1}}=0,\qquad \underset{s=1,2}{U_{n+s}}(y)\equiv\frac{d^{s-1}y(1)}{dx^{s-1}}=0\,. \tag{2}$$

Введем в рассмотрение фундаментальную систему решений уравнения $l(y)=0$:

$$y_j(x)=x^{j-1}e^{\lambda x},\quad j=\overline{1,n};\qquad y_{n+j}(x)=x^{j-1}e^{-\lambda x},\ j=\overline{1,2}\,. \tag{3}$$

Последующие построения тесно связаны с задачей (1)–(2) и системой (3). Матрицу

$$\left\{U_m\left(y_j\right)\right\}_{m,j=1}^{n+2}\equiv\left\{u_{m,j}(\lambda)\right\}_{m,j=1}^{n+2} \tag{4}$$

называют характеристической матрицей задачи (1)–(2), а

$$\Delta(\lambda)\equiv\det\left\{u_{ij}(\lambda)\right\}_{1}^{n+2}\ - \tag{5}$$

ее характеристическим определителем. Исходя из системы (3) находим, что

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1 \\ \lambda^2 & 2\lambda & 2! & \dots & 0 & \lambda^2 & -2\lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2} & \dots & \dots & (n-1)! & (-\lambda)^{n-1} & (n-1)(-\lambda)^{n-2} \\ e^{\lambda} & e^{\lambda} & \dots & \dots & e^{\lambda} & e^{-\lambda} & e^{-\lambda} \\ \lambda e^{\lambda} & (\lambda+1)e^{\lambda} & \dots & \dots & (\lambda+n-1)e^{\lambda} & -\lambda e^{-\lambda} & (1-\lambda)e^{-\lambda} \end{vmatrix} \quad (6)$$

Выделяя старшую часть в $\Delta(\lambda)$, имеем

$$\Delta(\lambda)\approx\lambda^{2n-4}e^{2\lambda}\prod_{k=1}^{n-3}k!+e^{-2\lambda}\prod_{k=1}^{n-1}k!,\quad \Delta(\lambda)\approx\left(\frac{\lambda^{2n-4}e^{2\lambda}}{(n-1)(n-2)}+e^{-2\lambda}\right)\prod_{n=1}^{n}k!. \quad (7)$$

Согласно равенству (7) для характеристических λ-корней имеем уравнение $e^{-4\lambda}\approx\lambda^{2n-4}-(n-2)(n-1)$, логарифмируя которое, приходим к его асимптотической форме:

$$\lambda\approx\frac{n-2}{-2}\ln\lambda-\ln\sqrt[4]{(n-2)(n-1)}. \quad (8)$$

Последнее уравнение запишем в стандартном виде:

$$\lambda\approx u\ln\lambda+v, \quad (9)$$

где $u=\dfrac{2-n}{2}$.

Это уравнение широко известно в литературе, его решение [4] имеет следующий вид:

$$\lambda_m\approx\ln 2\pi m|u|+\frac{2\arg u+\pi}{4\pi mu}\pm$$

$$\pm\sqrt{-1}\left[\arg u+\frac{\pi}{2}+2\pi m-\frac{\ln 2\pi m|u|}{2\pi m}\right],\ m=1,2,... \quad (10)$$

Таким образом, установлена

Лемма 1. Собственные значения задачи (1)–(2) образуют последовательность (10).

Функция Коши дифференциального выражения (1)

Обозначим через $Y(\xi,\lambda)$ матрицу Вронского решений (3). Как следует из теоремы Лиувилля, ее определитель не зависит от ξ, вследствие чего можно писать: $|Y(\xi,\lambda)|\equiv|Y(\lambda)|$.

Определение. Функцию

$$g(x,\xi,\lambda)=\begin{cases}\begin{vmatrix} y_1(\xi) & \dots & y_n(\xi) & y_{n+1}(\xi) & y_{n+2}(\xi) \\ y_1'(\xi) & \dots & y_n'(\xi) & y_{n+1}'(\xi) & y_{n+2}'(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)}(\xi) & \dots & y_n^{(n)}(\xi) & y_{n+1}^{(n)}(\xi) & y_{n+2}^{(n)}(\xi) \\ y_1(x) & \dots & y_n(x) & y_{n+1}(x) & y_{n+2}(x) \end{vmatrix}\dfrac{-1}{|Y(\lambda)|}, & \text{при } x<\xi \\ 0 & \text{при } x>\xi \end{cases} \tag{11}$$

назовем функцией Коши дифференциального выражения $l(y)$.

Отметим важные ее свойства, она:

1) n раз непрерывно дифференцируема по x,ξ на $[0,1]^2$;

2) $n+2$ раз непрерывно дифференцируема по x,ξ при $x\neq\xi$ и обладает скачком:

$$\left.\frac{d^s g(x,\xi,\lambda)}{d\xi^s}\right|_{\xi=x+0}=\begin{cases}0 & \text{при } s<n+1, \\ 1 & \text{при } s=n+1.\end{cases}$$

Функция Коши может быть определена неединственным образом. Так, функция

$$g(x,\xi,\lambda)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<\xi, \\ \begin{vmatrix} y_1(\xi) & \dots & y_{n+2}(\xi) \\ y_1'(\xi) & \dots & y_{n+2}'(\xi) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)}(\xi) & \dots & y_{n+2}^{n}(\xi) \\ y_1(x) & \dots & y_{n+2}(x) \end{vmatrix}\dfrac{1}{|Y(\lambda)|} & \text{при } x>\xi \end{cases} \tag{12}$$

аналогично служит функцией Коши дифференциального выражения $l(y)$. Формула (11) удобна далее в вычислениях при $\operatorname{Re}\lambda>0$, а (12) – при $\operatorname{Re}\lambda<0$.

Лемма 2. Для любой $n+1$ раз непрерывно дифференцируемой функции $f(x), 0<x<1$, равной нулю при $x=0,1,$ вместе со всеми производными справедливы формулы

$$\int_0^1 g(x,\xi,\lambda)f^{(n+1)}(\xi)d\xi=f(x)+O\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ |\lambda|>>1, \tag{13}$$

$$\int_0^1 g(x,\xi,\lambda)f^{(k)}(\xi)d\xi=\int_0^1 \frac{d^k g(x,\xi,\lambda)}{d\xi^k}f(\xi)d\xi \text{ при } k<n+1. \tag{14}$$

Под $g(x,\xi,\lambda)$ имеем в виду выражение (11) при $\operatorname{Re}\lambda>0$ $(x\le\xi)$ и (12) при $\operatorname{Re}\lambda<0$.

Доказательство. К формулам (13), (14) приходим интегрированием по частям соответственно $n+1$ и k раз. При интегрировании $n+1$ раз имеем

$$\int_0^1 g(x,\xi,\lambda) f^{(n+1)}(\xi) d\xi =$$

$$= f(x) + \int_x^1 f(x) \frac{d^{n+1} g(x,\xi,\lambda)}{d\xi^{n+1}} d\xi . \tag{15}$$

Отметим далее, что для определителя Вронского в знаменателе формулы (11) согласно выражениям (3) имеет место оценка

$$\left|Y(x,\lambda)\right| \le C \left|(\lambda)\right|^{1+2+...+n+1}, \; C>0, \; \forall x \in (0,1) . \tag{16}$$

Числитель дроби $\frac{d^{n+1} g(x,\xi,\lambda)}{d\xi^{n+1}}$, как определитель, представим в виде суммы $(n+1)!$ его членов. При этом ограничимся членом $d(\lambda,x)$, равным произведению элементов главной диагонали. Опуская аналогичные оценки остальных $(n+1)!$ слагаемых, имеем

$$d(\lambda,x) \approx \prod_{k=0}^{n+1} \lambda^k q_k(x) \int_x^1 f(\xi) \frac{d^{n+1} p_k(\xi) e^{\lambda(x-\xi)}}{d\xi^{n+1}} d\xi =$$

$$= \prod_{k=0}^{n+1} \lambda^k q_k(\xi) \int_x^1 f^{(n+1)}(\xi) p_k(\xi) e^{\lambda(x-\xi)} d\xi,$$

здесь $p_k(\xi)$, $q_k(\xi)$ – многочлены степеней, не превосходящих n. Интегрируя по частям в последнем выражении, придем к оценке

$$d(\lambda,x) \approx \lambda^{1+2+...+n+n} \text{ при } |\lambda| >> 1 . \tag{17}$$

Соединяя формулы (16), (17), придем к оценке интеграла в правой части (16). Повторяя аналогичные суждения в случае $\mathrm{Re}\lambda < 0, x \ge \xi$, завершим доказательство формулы (13).

Функция Грина и основная теорема

Построения и понятия, приведенные в предыдущих пунктах, легко связываются с выражением мероморфной по λ функцией Грина задачи (1)–(2), [5, с. 46]:

$$G(x,\xi,\lambda) = \frac{\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \tag{18}$$

где $\Delta(\lambda)$ определено по формуле (7), а

$$\Delta(x,\xi,\lambda)=\begin{vmatrix} g(x,\xi,\lambda) & y_1(x) & y_{n+2}(x) \\ U_1(g)_x & & \\ . & . & \\ . & . & \left\{U_s\left(y_j\right)\right\}_{i,j=1}^{n+2} \\ U_{n+2}(g)_x & & \end{vmatrix}=g(x,\xi,\lambda)\Delta(\lambda)+E(x,\xi,\lambda); \quad (19)$$

$E(x,\xi,\lambda)$ получено из $\Delta(x,\xi,\lambda)$ заменой нулем элемента в его левом верхнем углу.

Согласно представлению (14) при $\mathrm{Re}\lambda >> 0$, $x<\xi$, и аналогичному представлению при $\mathrm{Re}\lambda << 0$ имеем асимптотическую оценку $E(x,\xi,\lambda)/\Delta(\lambda) \underset{|\lambda|>>1}{\approx} e^{\lambda(x-\xi)}/\lambda^{n+1}$, из которой следует

Утверждение. Для любой непрерывной функции $f(x), 0<x<1$ справедливо равенство

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_l}\frac{d\lambda}{\lambda}\int_0^1\frac{E(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}f(\xi)d\xi=0, \quad (20)$$

где C_l – расширяющиеся контуры типа окружности с центром в начале λ-плоскости, проходящие вне δ-окружности нулей $\Delta(\lambda)$, удаляющиеся до бесконечности при $l\to\infty$ (в соответствии с леммой 1).

Теорема 2. Для любой $n+2$ раз непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$, равной нулю, со всеми производными на концах 0,1 справедлива формула разложения по корневым элементам задачи (1)–(2):

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_l}\frac{d\lambda}{\lambda}\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)\frac{d^{n+1}f(\xi)}{d\xi^{n+1}}d\xi=f(x).$$

Доказательство. Согласно лемме 2 и формулам (18)–(20) имеем

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_l}\frac{d\lambda}{\lambda}\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)\frac{d^{n+1}f(\xi)}{d\xi^{n+1}}d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\lim_{l\to\infty}\int_{C_l}\frac{d\lambda}{\lambda}\int_0^1 g(x,\xi,\lambda)\frac{d^{n+1}f(\xi)}{d\xi^{n+1}}d\xi+$$

$$+\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\lim_{l\to\infty}\int_{C_l}\frac{d\lambda}{\lambda}\int_0^1\frac{E(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\frac{d^{n+1}f(\xi)}{d\xi^{n+1}}d\xi=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\lim_{l\to\infty}\int_{C_l}\frac{f(x)}{\lambda}d\lambda+$$

$$+\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\lim_{l\to\infty}\int_{C_l}O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\cdot\frac{1}{\lambda}\frac{d^{n+1}f(\xi)}{d\xi^{n+1}}d\xi=f(x)+0=f(x).$$

Библиографический список

1. **Вагабов, А. И.** n-кратная формула разложения в ряды Фурье по корневым элементам дифференциального пучка с n-кратной характеристикой / А. И. Вагабов // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Т. 52, № 5. – С. 555–560.
2. **Вагабов, А. И.** Ряды Фурье по корневым функциям дифференциального пучка десятого порядка с пятикратными характеристиками / А. И. Вагабов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2017. – № 1 (41). – С. 44–50.
3. **Вагабов, А.И.** Задача базисности корневых функций дифференциального пучка $2n$-го порядка с кратными характеристиками / А. И. Вагабов // Вестник Волгоградского госуниверситета. Сер. 1, Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2018. – Т. 21, № 1. – С. 5–10.
4. **Вагабов, А. И.** Асимптотика нулей степенно-показательного многочлена / А. И. Вагабов // Доклады Академии наук СССР. – 1985. – Т. 285, № 5. – С. 1037–1042.
5. **Наймарк, М. А.** Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. – Москва : Наука, 1969. – 526 с.

References

1. Vagabov A. I. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. 2016, vol. 52, no. 5, pp. 555–560. [In Russian]
2. Vagabov A. I. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2017, no. 1 (41), pp. 44–50. [In Russian]
3. Vagabov A. I. *Vestnik Volgogradskogo gosuniversiteta. Ser. 1, Matematicheskaya fizika i komp'yuternoe modelirovanie* [Bulletin of Volgograd State University. Series 1. Mathematical physics and computer simulation]. 2018, vol. 21, no. 1, pp. 5–10. [In Russian]
4. Vagabov A. I. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences]. 1985, vol. 285, no. 5, pp. 1037–1042. [In Russian]
5. Naymark M. A. *Lineynye differentsial'nye operatory* [Linear differential operators]. Moscow: Nauka, 1969, 526 p. [In Russian]

Вагабов Абдулвагаб Исмаилович
доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического анализа, Дагестанский государственный университет (Республика Дагестан, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43-А)

Vagabov Abdulvagab Ismailovich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, sub-department of mathematical analysis, Dagestan State University (43-a M. Gadzhiyeva street, Makhachkala, the Republic of Dagestan)

E-mail: algebra-dgu@mail.ru

Образец цитирования:

Вагабов, А. И. О регулярности спектральных задач с двумя характеристическими корнями произвольных кратностей / А. И. Вагабов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2019. – № 2 (50). – С. 21–27. – DOI 10.21685/2072-3040-2019-2-2.